

Министерство образования, науки и молодежной политики
Краснодарского края
государственное бюджетное профессиональное образовательное
учреждение
Кропоткинский техникум технологий и железнодорожного транспорта
Краснодарского края

Комплект контрольно-оценочных средств
для оценки результатов освоения дисциплины
(в форме экзамена)

ЕН. 01 «Математика»

в рамках основной профессиональной образовательной программы (ОПОП)
технического профиля

для специальностей

среднего профессионального образования

**23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по
видам)**

базовая подготовка

3 года 10 месяцев

2023г.

1. Паспорт комплекта оценочных средств

1.1. Область применения комплекта оценочных средств

Комплект оценочных средств предназначен для контроля и оценки результатов освоения учебной дисциплины *ЕН 1 Математика*.

1.2. Сводные данные об объектах оценивания, основных показателях оценки результатов и их критериев, типах заданий, формах аттестации

Результаты освоения (объекты оценивания)	Основные показатели оценки результата и их критерии	Тип задания; № задания	Форма аттестации
<p>У 1. применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач;</p> <p>У 2. применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности;</p> <p>У 3. использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях;</p> <p>У 4. решать прикладные электротехнические задачи методом комплексных чисел.</p> <p>З 1. основные понятия и методы математическо-логического синтеза и анализа логических устройств.</p>	<p>Умение применять формулы дифференцирования для нахождения производных.</p> <p>Умение использовать формулы и правила нахождения первообразной функции.</p> <p>Умение находить неопределённые интегралы различными методами.</p> <p>Умение находить неопределённые интегралы способом замены переменной</p> <p>Умение использовать формулы и правила для нахождения первообразной функции.</p> <p>Умение находить определённые интегралы, используя формулу Ньютона-Лейбница</p> <p>Умение находить определённые интегралы методом подстановки, используя формулу Ньютона-Лейбница</p>	<p>Упражнения</p> <p>Практические работы №1-9</p> <p>Контрольная работа №1</p>	ЭКЗАМЕН
	<p>Умение находить площади фигур используя интегральное счисление</p>	<p>Упражнения</p> <p>Текущий контроль</p> <p>Устный опрос</p> <p>Решение задач</p>	
	<p>Уметь применять формулы комбинаторики для решения задач. Умение вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов.</p> <p>Умение применять для решения задач теоремы вероятности.</p>	<p>Текущий контроль</p> <p>Практические работы №10-13</p> <p>Контрольная работа №2</p>	
	<p>Умение выполнять действия с комплексными числами</p>	<p>Текущий контроль</p> <p>Практические работы №14-16</p> <p>Контрольная</p>	

	<p>Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений; решать системы уравнений по формулам Крамера и методом последовательного исключения переменных, т.е. методом Гаусса</p>	<p>работа №3 Решение задач Текущий контроль. Практические работы №17-20 Контрольная работа №4</p>	
--	--	---	--

2. Оценка освоения теоретического курса профессионального модуля.

2.1 Входной контроль

1. Задание 1

Найдите значение выражения $\left(\frac{13}{30} - \frac{11}{20}\right) \cdot 1\frac{4}{5}$.

2. Задание

Найдите значение выражения $\left(\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{2}}\right)^2$.

3. Задание

В магазине вся мебель продаётся в разобранном виде. Покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 10 % от стоимости купленной мебели. Шкаф стоит 3100 рублей. Во сколько рублей обойдётся покупка этого шкафа вместе со сборкой?

4. Задание

Перевести температуру из шкалы Цельсия в шкалу Фаренгейта позволяет формула $F = 1,8C + 32$, где C — градусы Цельсия, F — градусы Фаренгейта. Какая температура по шкале Цельсия соответствует 116° по шкале Фаренгейта? Ответ округлите до десятых.

5. Задание

Найдите значение выражения $\sqrt{18} - \sqrt{72} \sin^2 \frac{13\pi}{8}$.

6. Задание

В университетскую библиотеку привезли новые учебники по геометрии для 3 курсов, по 360 штук для каждого курса. Все книги одинаковы по размеру. В книжном шкафу 9 полок, на каждой полке помещается 25 учебников. Сколько шкафов можно полностью заполнить новыми учебниками?

7. Задание

Найдите корень уравнения: $\cos \frac{\pi(8x+1)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

8. Задание

Электрику ростом 1,8 метра нужно поменять лампочку, закреплённую на стене дома на высоте 4,2 м. Для этого у него есть лестница длиной 3 метра. На каком наибольшем расстоянии от стены должен быть установлен нижний конец лестницы, чтобы с последней ступеньки электрик дотянулся до лампочки? Ответ запишите в метрах.

9. Задание

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) расстояние от Земли до Луны
- Б) объём воды в Чёрном море
- В) площадь территории России
- Г) масса Земли

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) $5,9726 \cdot 10^{24}$ кг
- 2) 17 млн кв. км
- 3) 385 000 км
- 4) $555\,000 \text{ км}^3$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

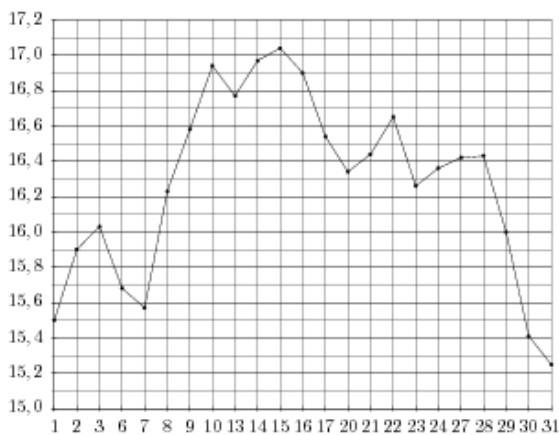
А	Б	В	Г

10. Задание

Игральную кость с 6 гранями бросают дважды. Найдите вероятность того, что хотя бы раз выпало число, большее 3.

11. Задание

На рисунке жирными точками показана цена серебра, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена серебра в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена серебра впервые была равна 16 рублям за грамм.



12. Задание

Турист, прибывший в Санкт-Петербург, хочет посетить 4 музея: Эрмитаж, Русский музей, Петропавловскую крепость и Исаакиевский собор. Экскурсионные кассы предлагают маршруты с посещением одного или нескольких объектов. Сведения о стоимости билетов и составе маршрутов представлены в таблице.

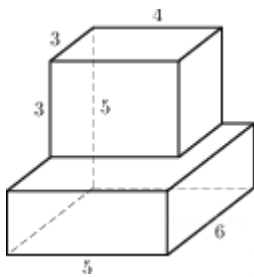
Номер билета	Посещаемые объекты	Стоимость (руб.)

1	Эрмитаж	300
2	Эрмитаж, Русский музей	1450
3	Исаакиевский собор	350
4	Петропавловская крепость, Исаакиевский собор	1300
5	Русский музей	350
6	Петропавловская крепость, Русский музей	1600

Какие маршруты должен выбрать путешественник, чтобы посетить все четыре музея и затратить на все билеты наименьшую сумму?

В ответе укажите какой-нибудь один набор номеров маршрутов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

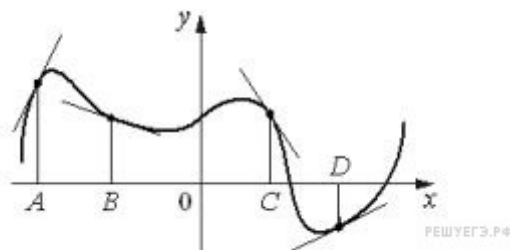
13. Задание



Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

14. Задание

На рисунке изображены график функции и касательные, проведённые к нему в



точках с абсциссами A , B , C и D .

В правом столбце указаны значения производной функции в точках A , B , C и D . Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной функции в ней.

ТОЧКИ

A
 B
 C
 D

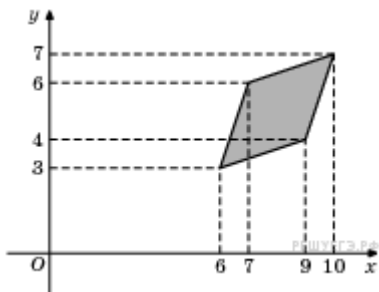
ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

1) $-1,5$
2) $0,5$
3) 2
4) $-0,3$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

A	B	C	D

15. Задание 15 № 27580



Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (6;3), (9;4), (10;7), (7;6).

ответы:

1	-0,21
2	2
3	3410
4	46,7
5	-3
6	4
7	-0,25
8	1,8
9	3421
10	0,75
11	29
12	145/154/415/514/541
13	146
14	3412
15	8

2.2 Текущий контроль

1. Введение в математический анализ.

Устный опрос

Текст задания

Сформулировать правила дифференцирования и записать производные основных элементарных функций:

1°. $c' =$

8°. $(tgx)' =$

2°. $(x^\alpha)' =$

9°. $(ctgx)' =$

В частности, $x' =$

$$(x^2)' =$$

$$(x^3)' =$$

$$(\sqrt{x})' =$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$3^\circ. (kx+b)' =$$

$$4^\circ. (a^x)' =$$

В частности, $(e^x)' =$

$$5^\circ. (\log_a x)' =$$

В частности, $(\ln x)' =$

$$(\lg x)' =$$

$$6^\circ. (\sin x)' =$$

$$7^\circ. (\cos x)' =$$

$$10^\circ. (\arcsin x)' =$$

$$11^\circ. (\arccos x)' =$$

$$12^\circ. (\operatorname{arctg} x)' =$$

$$13^\circ. (\operatorname{arcctg} x)' =$$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

$$14^\circ. (u+v)' =$$

$$15^\circ. (u-v)' =$$

$$16^\circ. (uv)' =$$

$$17^\circ. (cu)' =$$

$$18^\circ. \left(\frac{u}{v}\right)' =$$

$$\text{В частности, } \left(\frac{1}{v}\right)' =$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

$$19^\circ. f(\varphi(x))' =$$

Время на выполнение: 15 мин.

Критерии оценок:

«5» - более 18 правильных ответов;

«4» - от 15 до 18 верных ответов;

«3» - от 11 до 14 верных ответов;

Менее 10 – незачет

Текст задания

Записать табличные интегралы:

$$1. \int 0 dx =$$

$$2. \int x^\alpha dx =$$

$$\text{В частности, } \int dx =$$

$$3. \int \frac{dx}{x} =$$

$$4. \int a^x dx =$$

$$\text{В частности, } \int e^x dx =$$

$$5. \int \cos x dx =$$

$$6. \int \sin x dx =$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$\text{В частности, } \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$10. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} =$$

$$\text{В частности, } \int \frac{dx}{1 + x^2} =$$

Время на выполнение: 10 мин.

Критерии оценок:

«5» - 11 правильных ответов;

«4» - от 8 до 10 верных ответов;

«3» - от 6 до 7 верных ответов;

Менее 6 – незачет

Самостоятельная работа обучающихся на тему:

«Производные и дифференциалы высших порядков.»

- Даны функции $y(x)$ и $g(x)$. Найти производные первого, второго, третьего и четвертого порядков.
 - $y(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 7x + 4$ и $g(x) = 3^x$;
 - $y(x) = 2x^5 - x^3 - 5x^2 + 13x + 1$ и $g(x) = 14^x$;
 - $y(x) = 2x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 6x$ и $g(x) = \sin 2x$;
 - $y(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 18x + 18$ и $g(x) = \cos 2x$;
- Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков.
 - $f(x) = (4x + 5)^3$; II. $f(x) = (2x + 4)^6$; III. $f(x) = (3x + 3)^5$; IV. $f(x) = (5x + 15)^4$.
- Раскрыть неопределенность с помощью правила Лопиталья.

$$\text{I. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e};$$

$$\text{II. } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right);$$

$$\text{III. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right);$$

$$\text{IV. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3};$$

Критерии оценок:

оценка «5» - при выполнении всех заданий

оценка «4» - при выполнении 1 – 2 заданий

оценка «3» - при выполнении первого задания

Самостоятельная работа «Вычисление определенных интегралов и его практическое приложение»

Текст задания

Вариант 1

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^2 (4x^2 + x - 3) dx$.
2. Вычислить определенный интеграл методом подстановки: $\int_2^3 (2x - 1)^3 dx$.
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 4$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$.
4. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.
5. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 + 2t + 1$ (м/с). Найти путь S , пройденный точкой за 10 сот начала движения.

Вариант 2

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^3 (2x^2 - x + 4) dx$.
2. Вычислить определенный интеграл методом подстановки: $\int_0^1 (3x + 1)^4 dx$.
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

4. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.
5. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 9t^2 - 8t$ (м/с). Найти путь S , пройденный точкой за четвертую секунду.

Время на выполнение: 40 мин.

Критерии оценок:

«5» - все задания выполнены;

«4» - выполнены 4 задания;

«3» - выполнено 50%

Самостоятельная работа обучающихся по теме

«Дифференциальное и исчисление функции одной действительной переменной».

Устный опрос: ответьте на вопросы:

- 1) Сформулируйте определение производной.
- 2) Производная функции одной переменной: геометрический и физический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику функции.
- 3) Правила дифференцирования.
- 4) Производная сложной функции.
- 5) Таблица производных основных элементарных функций.
- 6) Связь дифференцируемости и непрерывности функции
- 7) Дифференциал: определение, свойства, геометрический смысл.
- 8) Необходимое условие экстремума дифференцируемых функций
- 9) Достаточное условие экстремума.
- 10) Наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке.
- 11) Выпуклость и вогнутость графика функции на заданном промежутке; точка перегиба.
- 12) Исследование функции на экстремум с помощью второй производной.
- 13) Асимптоты графика функции.
- 14) Общий план исследования функции и построения графика.
- 15) Первообразная и неопределенный интеграл: понятие, свойства. Таблица неопределенных интегралов.
- 16) Замена переменной.
- 17) Определенный интеграл: определение, свойства, геометрический смысл.
- 18) Формула Ньютона-Лейбница.
- 19) Вычисление площадей плоских фигур.
- 20) Физические приложения определенного интеграла.

Задания для письменного выполнения

1 вариант

- 1) Найти производную функций:

$$\text{а) } y = x \cos x \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x; \text{б) } y = \frac{x^2 e^{-x^2}}{x^2 + 1}.$$

2) Методами дифференциального исчисления исследовать функцию $y = \frac{9x}{9 - x^2}$ и построить график;

3) Вычислить неопределённые интегралы:

$$\text{а) } \int (2e^x - \sqrt[3]{x^2}) dx; \text{б) } \int \frac{dx}{(6x + 7)^3}$$

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовых координатах: $y = x + 2, y = 2 - x, y = 0$

2 вариант

1) Найти производную функций:

$$\text{а) } y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}; \quad \text{б) } y = \operatorname{arctg} \frac{2x^4}{1 - x^8}$$

2) Методами дифференциального исчисления исследовать функцию

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} \text{ и построить график;}$$

3) Вычислить неопределённые интегралы:

$$\text{а) } \int (3 \cos x + 2\sqrt[5]{x^3}) dx \quad \text{б) } \int \frac{dx}{(8 - 13x)^2}$$

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовых координатах: $y = 2x - 4, y = 2 - x, x = 0$

Критерии оценок:

оценка «5» - при выполнении всех заданий и аккуратном оформлении;

оценка «4» - при выполнении всех заданий, 75%, но с недочетами.

оценка «3» - при выполнении 50% заданий, или выполнено 2 задания, или ход решения верный, но допущены вычислительные ошибки.

Устный опрос по теме «Дифференциальные уравнения».

1. Сформулировать общие положения при составлении дифференциального уравнения по условию задачи.
2. Записать дифференциальное уравнение показательного роста и показательного убывания и получить его решение. Привести примеры прикладных задач, решаемых с его помощью.
3. Сформулировать задачу о радиоактивном распаде, записать для нее дифференциальное уравнение.
4. Сформулировать задачу о гармонических колебаниях, записать дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

5. Сформулировать задачу о падении тел в атмосферной среде, записать для нее дифференциальное уравнение

Самостоятельная работа обучающихся по теме:

«Вычисление частных производных функций нескольких переменных».

Вариант 1

1) Вычислить частные производные 1 и 2 порядков функции нескольких переменных.

1. $u(x, y) = 3x^2y + 2xy^3 - 2x + y$

2. $u(x, y) = \ln(x + \ln y)$

2) Вычислите z''_{xy} для функции $z(x, y) = \frac{2x-y}{3xy}$

Вариант 2

1) Вычислить всевозможные частные производные 1 и 2 порядков функции нескольких переменных.

1. $z(x, y) = ax^2 + by^5 + c$

2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$

2) Вычислите z''_{xy} для функции $z(x, y) = \frac{3xy}{4x+y}$

Устный опрос по теме «Комплексные числа».

1) Текст задания

- 1) Дайте определение комплексного числа
- 2) Запишите формулы записи комплексных чисел
- 3) Запишите формулы действий в различных формах записи комплексных чисел.

Время на подготовку и выполнение: 20 минут

Шкала оценки образовательных достижений

Отметка «5», если ученик:

- полно раскрыл содержание материала,
- изложил материал грамотным языком в определенной логической последовательности, точно используя математическую терминологию и символику;
- отвечал самостоятельно без наводящих вопросов учителя. Возможны одна - две неточности при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, которые ученик легко исправил по замечанию учителя.

Отметка «4», если ученик:

- в изложении допустил небольшие неточности, не исказившие математическое содержание ответа;
- допущены один – два недочета при освещении основного содержания ответа, исправленные по замечанию учителя;
- допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, легко исправленные по замечанию учителя.

Отметка «3», если ученик:

- неполно или непоследовательно раскрыл содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного материала;
- имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании математической терминологии, выкладках, исправленные после нескольких наводящих вопросов учителя;
- при знании теоретического материала выявлена недостаточная сформированность основных умений и навыков.

Отметка «2», если ученик:

- не раскрыл основное содержание учебного материала;
- обнаружено незнание или непонимание учеником большей или наиболее важной части учебного материала;
- допустил ошибки в определении понятий, при использовании математической терминологии, в выкладках, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов учителя.

Самостоятельная работа по теме «Действия над комплексными числами».

1. Найдите сумму комплексных чисел: $(5+i) + (6-7i)$

2. Найти произведение комплексных чисел: $(2+i) \cdot (3-5i)$

3. Представьте комплексное число в тригонометрической форме:

a) $z = 2i$

b) $z = -1 - i\sqrt{3}$

$$z_1 = 3 + 4i$$

4. Для чисел $z_2 = 8 + 6i$ вычислите модули следующих выражений:

1. z_1

2. z_2

3. $z_1 + z_2$

4. $z_1 - z_2$

5. Даны числа:

$$z_1 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$z_2 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

Вычислите, используя правила умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме:

5. $z_1 \cdot z_2$

6. $z_1 : z_2$

Критерии оценок:

оценка «5» - при выполнении всех заданий и аккуратном оформлении;
оценка «4» - при выполнении всех заданий, 75%, но с недочетами.
оценка «3» - при выполнении 50% заданий,

Проверочная работа по теме «Теория вероятностей и математическая статистика».

Задача 1. На столе лежат ручки, одинаковые на вид: 8 с синей пастой и 12 с чёрной. Вася наугад берёт одну из ручек. Найдите вероятность того, что это будет ручка с синей пастой.

Задача 2 Из 25 студентов четверо пришли на урок в красных футболках, пятеро - в синих, трое - в жёлтых. Остальные пришли на урок в костюмах. Какова вероятность того, что случайно выбранный студент пришёл на урок в футболке?

Задача 3 На старый новый год сделали 80 вареников, из них 12 с начинкой предвещающей хорошие события, и 10 - с начинкой, предвещающей плохие события. Хозяйка первой выбирает 1 вареник. Какова вероятность того, что она вытащит „хороший” вареник?

Задача 4 В ящике лежало 40 маркеров, из них 16-синие, 10-красные, а остальные – зеленые. Какова вероятность того, что наугад взятый маркер окажется зеленым?

Задача 5 В среднем из 1600 садовых шлангов 8 протекают. Найдите вероятность того, что выбранный наугад шланг не протекает

Задача 6 Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Контрольная работа №2 по теме «Теория вероятностей и математическая статистика».

1. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из пяти цифр 1,2,3,4,5?

2. Были куплены билеты в театр для шести ребят. Сколькими способами эти ребята могут занять свои места в театре?

3. У покупателя имелись в кошельке по одной купюре 10 руб., 50 руб., 100 руб. и 500 руб., а у продавца не было денег, чтобы дать сдачу. Сколько различных товаров мог купить покупатель, чтобы ему не нужно было требовать сдачу

(Предполагается, что в магазине есть товары на любую сумму, доступную покупателю)?

4. Шифр пакета, содержащего конкурсные задания, состоит из трех различных букв и последующих 4 цифр (цифры могут повторяться). Сколько может быть различных пакетов, если в них используется 10 букв и 5 цифр?

5. Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся П. верно решит больше 9 задач, равна 0,59. Вероятность того, что П. верно решит больше 8 задач, равна 0,65. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 9 задач.

6. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

7. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Критерии оценивания:

оценка «5» - при выполнении всех заданий и аккуратном оформлении;

оценка «4» - при выполнении всех заданий, 75%, но с недочетами.

оценка «3» - при выполнении 50% заданий,

Типовые задания для оценки освоения раздела 4 «Матрицы».

Самостоятельная работа обучающихся: «Различные способы решения систем линейных уравнений».

Проверяемые результаты обучения: выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;

Ответьте на вопросы:

- 1) Сформулируйте определение матрицы;
- 2) Перечислите виды матриц;
- 3) Сформулируйте правило сложения матриц;
- 4) Сформулируйте правило умножения матриц;

5) Определитель матрицы, его свойства.

6) Обратная матрица, правило ее нахождения;

1) Ранг матрицы, правило нахождения.

Вычислить произведение матриц A и B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычислить сумму матриц A и B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Контрольная работа №3

1 вариант

1) Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти

$A^T B + \alpha C$.

2) Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

3) Решить систему $\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$ тремя способами:

- методом Крамера;
- методом Гаусса;
- матричным методом.

2 вариант

1) Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти

$A^T B + \alpha C$.

2) Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3) Решить систему $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$ тремя способами:

- а) методом Крамера;
- б) методом Гаусса;
- в) матричным методом.

Критерии оценок:

оценка «5» - при выполнении всех заданий и аккуратном оформлении;

оценка «4» - при выполнении всех заданий, но с недочетами.

оценка «3» - при выполнении 50% заданий, или выполнено 2 задания, или ход решения верный, но допущены вычислительные ошибки.

Практические работы:

1. Геометрический смысл дифференциала. Формулы интегрирования
2. Интегрирование способом подстановки
3. Арифметические действия с комплексными числами.
4. Решение задач для нахождения полного сопротивления электрической цепи переменного тока с помощью комплексных чисел
5. Генеральная и выборочная статистические совокупности.
6. Вычисление числовых характеристик.
7. Вычисление определителей.
8. Свойства матрицы.
9. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы.
10. Решение системы линейных уравнений методом Крамера.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ №1

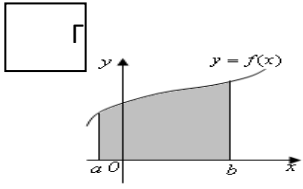
для проведения промежуточной аттестации в форме экзамена по учебной дисциплине ЕН.01 Математика

Студент 3 курса группы _____.

ФИО _____

Вариант №1

Установите соответствие между термином, формулой, свойством, формулировкой и математическим объектом.

<p>1. Какой из математических объектов является производной второго порядка?</p> <p>2. Какой из математических объектов является неопределенным интегралом?</p> <p>3. Какой из математических объектов является сложной функцией?</p> <p>4. Какое выражение является неопределенностью вида «ноль на ноль»?</p> <p>5. Какая из формул является формулой Ньютона – Лейбница?</p> <p>6. Какой из математических объектов является пределом функции на бесконечности?</p> <p>7. Какая формула вычисляет производную дроби?</p> <p>8. Какой из математических объектов является определенным интегралом?</p> <p>9. Какое выражение является неопределенностью вида «бесконечность на бесконечность»?</p> <p>10. Какая формула вычисляет производную произведения?</p> <p>11. Какой из математических</p>	<p>A) $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx$</p> <p>Б) $\int (4-3x) \sin \frac{3}{2} x dx$</p> <p>В) $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$</p>  <p>Д) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$</p> <p>Е) $k = f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$</p> <p>Ж) $V = S'(t)$</p> <p>З) $(Cx)' = C \cdot x'$</p>	<p>И) $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$</p> <p>К) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{5x+1}$</p> <p>Л) y''</p> <p>М) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3+2}{x^2-1}$</p> <p>Н) $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$</p> <p>О) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$</p> <p>П) $y = 2^{\operatorname{arctg} x} - x$</p> <p>Р) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$</p> <p>С) y'</p> <p>Т) $dy = y'_x \cdot dx$</p> <p>У) $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big _a^b = F(b) - F(a)$</p>
--	---	--

<p>объектов является криволинейной трапецией?</p> <p>12. Какая формула позволяет найти угловой коэффициент касательной к кривой графика функции?</p> <p>13. Какая из формул позволяет найти скорость по известному пути?</p>		
--	--	--

ТАБЛИЦА ОТВЕТОВ

									0	1	2	3

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 2

для проведения промежуточной аттестации в форме экзамена по учебной дисциплине

ЕН.01 Математика

Задание 1-7 выполняется на отдельном листе с оформлением краткого решения.

Критерии оценивания:

Оценка "3"- 7-8 правильных ответов из теоретической части и 3-4 правильно решенных практических задания.

Оценка "4"- " - 9-11 правильных ответов из теоретической части и 5-6 правильно решенных практических задания.

Оценка "5"- " - 12-13 правильных ответов из теоретической части и 7 правильно решенных практических задания.

Вариант №1

1. Даны матрицы А и В:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычислить:

- а) сумму матриц
- б) произведение матриц

2. Вычислить определенный интеграл $\int_0^3 (5x+1)dx$.

3. Решить систему уравнений методом Крамера:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$
4. Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x + 6}$
5. Найти производную функции $y = e^{2x^5 - 8}$.
6. Два студента решают задачу независимо друг от друга. Вероятность того, что решит 1-й – 0,5, что решит 2-й – 0,9. Найти вероятность того, что:
- решат оба;
 - решит только один?
7. Представить комплексное число в тригонометрической форме:
 $z = 2 + 2i$

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ №1

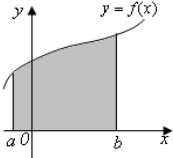
для проведения промежуточной аттестации в форме экзамена по учебной дисциплине ЕН.01 Математика.

Студент 3 курса группы _____.

ФИО _____

Вариант №2

Установите соответствие между термином, формулой, свойством, формулировкой и математическим объектом.

<ol style="list-style-type: none"> Какой из математических объектов является неопределенным интегралом? Какой из математических объектов является производной второго порядка? Какой из математических объектов является сложной функцией? Какое выражение является неопределенностью вида «ноль на ноль»? Какая из формул является формулой Ньютона – Лейбница? Какая формула вычисляет производную дроби? Какой из математических объектов является пределом функции на бесконечности? 	<p>A) $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx$</p> <p>B) $\int \frac{3dx}{x-2}$</p> <p>B) $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$</p>  <p>Д) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$</p> <p>E) $k = f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$</p>	<div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px; width: 40px; margin: 0 auto;">К</div> <p>Л) --- $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$</p> <p>M) --- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 6x^2 - 9}{x^2 + 2x - 1}$</p> <p>H) _____ y'''</p> <p>O) _____ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x^2 - 4x)}{3x}$</p> <p>П) _____ $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$</p> <p>P) _____ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$</p> <p>C) _____ $y = 2^{\operatorname{arctg} x - x}$</p>
---	--	--


<p>8. Какое выражение является неопределенностью вида «бесконечность на бесконечность»?</p> <p>9. Какой из математических объектов является криволинейной трапецией?</p> <p>10. Какой из математических объектов является определенным интегралом?</p> <p>11. Какая формула вычисляет производную произведения?</p> <p>12. Какая формула позволяет найти угловой коэффициент касательной к кривой графика функции?</p> <p>13. Какая из функций на графике является непрерывной?</p>	 <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;">Ж</div> <p>З) --- $V = S'(t)$</p> <p>И) --- $(Cx)' = C \cdot x'$</p>	<p>Т) --- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$</p> <p>У) --- y'</p> <p>Ф) --- $\int_a^b f(x)dx = F(x) _a^b = F(b) - F(a)$</p>
---	---	--

ТАБЛИЦА ОТВЕТОВ

										0	1	2	3

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 2

для проведения промежуточной аттестации в форме экзамена по учебной дисциплине ЕН.01 Математика

Вариант 2.

Задание 1-7 выполняется на отдельном листе с оформлением краткого решения.

Критерии оценивания:

Оценка "3"- 7-8 правильных ответов из теоретической части и 3-4 правильно решенных практических задания.

Оценка "4"- " - 9-11 правильных ответов из теоретической части и 5-6 правильно решенных практических задания.

Оценка "5"- " - 12-13 правильных ответов из теоретической части и 7 правильно решенных практических задания.

1. Даны матрицы А и В:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислить:

- а) сумму матриц
б) произведение матриц

2. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 (x-5)dx$.

3. Вычислить систему методом Крамера:
$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases}$$

4. Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 7x + 10}$

5. Вычислить производную функции: $y = \ln(7x^2 + 3x^3)$

6. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода

7. Представить комплексное число в показательной форме:
 $z = 2 + 2i$

I. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ №1

КЛЮЧ К ТАБЛИЦЕ ОТВЕТОВ. Вариант №1

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Л	Б	П	Н	У	К	И	А	В	Д	Г	Е	Ж

КЛЮЧ К ТАБЛИЦЕ ОТВЕТОВ. Вариант №2

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Б	Н	С	О	Ф	Л	М	В	Г	А	Д	Е	К

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 2

Вариант 1

1. а) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 12 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 15 & 7 & 5 \\ 46 & 19 & 21 \\ 7 & -9 & -21 \end{pmatrix}$

2. Ответ: 25,5

3. $\Delta = 5 \quad \Delta_1 = 5 \quad \Delta_2 = 25 \quad \Delta_3 = 10 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 2$

4. Ответ 5

5. Ответ: $10x^4 e^{2x^5-8}$

6. а) 0.45 б) 0.51

7. $2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

Вариант 2

1. а) $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 14 \\ 2 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 27 & 19 & 12 \\ 53 & 19 & 28 \\ 19 & 47 & 22 \end{pmatrix}$

2. Ответ: -4.5

3. $\Delta = -6$ $\Delta x = -12$ $\Delta y = -18$ $\Delta z = 12$ $x = 2$ $y = 3$ $z = -2$

4. Ответ: -1

5. Ответ: $\frac{14+9x}{7x+3x^2}$

6. Ответ: 0.384

7. Ответ: $z = 2\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$

Практическая работа №3

1. Тема: Арифметические действия с комплексными числами.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с комплексными числами.

Методические указания для практической работы Теоретические сведения к практической работе

1. Понятие комплексного числа

Комплексными числами называются числа вида

$$z = x + iy, \quad (1.1)$$

где x, y – действительные (вещественные) числа, а число i определяемое

равенством $i^2 = -1$ ($i = \sqrt{-1}$), называется мнимой единицей.

Число x называется *действительной (вещественной) частью* комплексного числа (используется обозначение $x = \operatorname{Re} z$); y – мнимой частью комплексного числа z ($y = \operatorname{Im} z$).

Выражение (1.1) называют *алгебраической формой записи комплексного числа*.

Если $x=0$, то число z называют чисто мнимым; если $y=0$, то получается вещественное число $z = x + 0i = x$.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются сопряженными. Используя формулу разности квадратов, получаем, что $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два сопряженных комплексных числа.

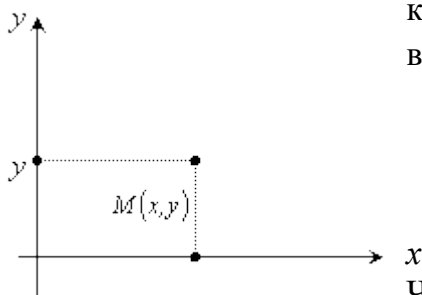
Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

Решение. Дискриминант данного уравнения: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 72 = -36$ меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 6i}{2}, \text{ т.е. } x_1 = 3 + 3i; x_2 = 3 - 3i.$$

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны друг другу, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$; комплексное число z считается равным нулю, если $x = y = 0$.

Всякое комплексное число можно изобразить на плоскости, т.к.



каждому z соответствует упорядоченная пара вещественных чисел (x, y) :

Число $z=0$ ставится в соответствие началу координатной плоскости. Такую плоскость мы в дальнейшем будем называть комплексной плоскостью, ось абсцисс – действительной, а ось ординат – мнимой осью комплексной плоскости.

Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$ или $r, r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Тригонометрическая форма комплексного числа Тригонометрическая форма комплексного числа. Каждому комплексному числу вида (1.1) можно поставить в соответствие точку $M(x;y)$ на декартовой плоскости (при этом на оси Ox располагаются вещественные числа $z = x + i0 = x$, а на оси OY – чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$).

Модулем комплексного числа назовем длину отрезка $|OM|$ (или расстояние от начала координат до точки M), т.е. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргументом комплексного числа ($\varphi = \text{Arg}z$) назовем угол, который вектор \vec{OM} образует с положительным направлением оси Ox . Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию $0 \leq \varphi < 2\pi$.

При этом выражение вида

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1.2)$$

называется *тригонометрической формой записи комплексного числа*.

Преобразуем (1.1)

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = |z| \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

и, сравнивая с (1.2), получаем, что φ – аргумент комплексного числа z можно найти, решив систему

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{|z|} \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|} \end{cases} \quad (1.3)$$

Заметим, что при выборе значений φ из последнего уравнения необходимо учитывать знаки x и y .

φ – аргумент комплексного числа z можно найти формул $\cos \varphi = \frac{x}{r}$, $\sin \varphi = \frac{y}{r}$ (1.3) или в

силу того, что $\text{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, $\varphi = \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$.

Пример 2. Записать комплексное число в тригонометрической форме:

- a. $6i$; b) $1 - i\sqrt{3}$, указать модуль и аргумент комплексного числа.

Решение. а) Здесь $x=0$, $y=6$ $|z|=6$.

Поскольку число $6i$ лежит на положительной полуоси Oy , то значение

аргумента $\varphi = \frac{\pi}{2}$, поэтому $6i = 6 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) i$.

- b. Здесь $x=1$, $y = -\sqrt{3}$.

По определению $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Для определения аргумента воспользуемся

формулой: $\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Получаем, что $\varphi = \text{arg} z = \frac{5\pi}{3}$. Тригонометрическая форма заданного

комплексного числа имеет вид: $z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$.

Пример 3. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Решение. Найдем модуль и аргумент комплексного числа: $|z| = \sqrt{1+3} = 2$. Угол φ найдем

из соотношений $\cos \varphi = \frac{x}{r}$, $\sin \varphi = \frac{y}{r}$. Тогда получим $\cos \varphi = \frac{-1}{2}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Очевидно, точка $z = -1 + i\sqrt{3}$ находится во второй четверти: $\varphi = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$.

Подставляя в формулу (1.2) найденные r и φ , имеем
$$z = 2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right).$$

3. Действия над комплексными числами

1) **Сумма** двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется согласно формуле $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

2) **Операция вычитания** комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению. Комплексное число $z = x_1 - x_2$, если $z_2 + z = z_1$, является разностью комплексных чисел z_1 и z_2 . Тогда $z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Пример 4. Выполнить действия: а) $(4+2i)+(1+5i)$; б) $(3+5i)-(6+3i)$.

а) По правилу сложения комплексных чисел получим $(4+2i)+(1+5i)=(4+1)+(2+5)i=5+7i$.

б) По правилу вычитания комплексных чисел получим $(3+5i)-(6+3i)=(3-6)+(5-3)i=-3+2i$.

3) **Произведение** двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется по формуле $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$. В частности $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$.

Можно получить формулу умножения комплексных чисел в тригонометрической форме.

Имеем $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$.

Пример 5. Выполнить действия: а) $2i \cdot 3i$; б) $(2-3i)-(2+3i)$; в) $(5-4i)-(3+2i)$.

а) $2i \cdot 3i = 6i^2 = -6$;

б) $(2-3i)-(2+3i) = 4-9i^2 = 4+9 = 13$;

в) $(5-4i)-(3+2i) = (5-3) + (-4-2)i = 2-6i$.

Можно выполнить умножение по правилу умножения многочленов:

$(5-4i)-(3+2i) = 15+10i-12i+8 = 23-2i$.

4) **Деление** комплексных чисел определяется как операция, обратная умножению, то

есть число $\frac{z_1}{z_2}$ называется частным от деления z_1 на z_2 , если $z_1 = z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2}$.

Тогда
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + iy_1 x_2 - ix_1 y_2 - i^2 y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Окончательно
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

В тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Операция деления возможна только в случае, когда $z_2 \neq 0 + i0 = 0$.

Пример 6. Выполнить действия: а) $\frac{2}{3i}$; б) $\frac{1}{1+i}$; в) $\frac{1+i}{1-i}$; д) $\frac{2-7i}{3+4i}$ и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.
Решение.

а) Умножаем делимое и делитель на i , получим $\frac{2}{3i} = \frac{2i}{3i \cdot i} = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i$.

б) Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный

делителю: $\frac{1}{1+i} = \frac{1(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

в) Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный

делителю: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$.

д) Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю:

$$z = \frac{2-7i}{3+4i} = \frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2} = \frac{6-29i-28}{9+16} = \frac{-22-29i}{25} = -\frac{22}{25} - \frac{29}{25}i;$$

Вещественная и мнимая части равны: $\operatorname{Re} z = -\frac{22}{25}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{29}{25}$.

5) **Возведение в степень и извлечение корней.** Если комплексное число задано тригонометрической формой $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то справедлива формула Муавра $z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. (1.4)

б) Для извлечения корня n -й степени (n – целое число, большее 1) из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, применяется формула, дающая n значений этого корня:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k=0, 1, \dots, n-1. (1.5)$$

Пример 7. Вычислить: $(-1+i)^{13}$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме.

Имеем: $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\cos \varphi = -1/\sqrt{2}$ и $\sin \varphi = 1/\sqrt{2}$, т.е. $\varphi = 3\pi/4$ (так как соответствующая точка лежит во второй четверти).

Следовательно, $-1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ и $(-1+i)^{13} = \sqrt{2}^{13} \left(\cos \frac{3 \cdot 13\pi}{4} + i \sin \frac{3 \cdot 13\pi}{4} \right)$ (в силу

(1.4)). Учитывая, что $\frac{39\pi}{4} = 10\pi - \frac{\pi}{4}$ и используя свойства тригонометрических функций, получаем:

$$(-1+i)^{13} = 64\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 64\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 64 - 64i.$$

Пример 8. Возвести число $z = \sqrt{3}-i$ в пятую степень.

Решение. Получим тригонометрическую форму записи

числа z . $r = \sqrt{3+1} = 2$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$. Отсюда $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, а $z = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$. Тогда

по формуле Муавра получим: $z^5 = 2 \left[\cos \left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin \left(-\frac{5}{6}\pi\right) \right] = 2 \left(\cos \frac{5}{6}\pi - i \sin \frac{5}{6}\pi \right) =$

$$= 2 \left(-\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = -2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -(\sqrt{3} + i)$$

Пример 9. Вычислить: $\sqrt[3]{-1}$.

Тригонометрическая форма заданного числа имеет вид $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ ($|z|=1$), поэтому в силу (1.5)

$$z_k = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3}, \quad k=0, 1, 2.$$

Выписываем три искомых корня:

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_1 = \cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3} = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

$$z_2 = \cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задание 1. Выполните сложение комплексных чисел, выпишите вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел:

а) $(5+3i)+(1+10i)$; б) $(3+i)+(-3-8i)$; в) $(-6+2i)+(-6-2i)$.

Задание 2. Выполните действия:

а) $(2-3i)+(5+6i)+(-3-4i)$; б) $(1-i)-(7-3i)-(2+i)+(6-2i)$.

Задание 3. Выполните умножение комплексных чисел:

а) $(5-3i) \cdot 2i$; б) $-i \sqrt{5} \cdot 4i \sqrt{5}$; в) $(5+3i)(2-5i)$; г) $(3+4i)(3-4i)$.

Задание 4. Выполните деление комплексных чисел:

а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1}{1-i}$; в) $\frac{1-i}{1+i}$; г) $\frac{3-2i}{1+3i}$.

Задание 5. Запишите комплексные числа в тригонометрической форме:

а) $3i$; б) $-2+2\sqrt{3}i$; в) $2-2i$; г) $-\sqrt{3}-i$

Задание 6. Решите уравнения:

а) $x^2+9=0$; г) $x^2+2x+10=0$;

б) $x^2-3x+10=0$; д) $x^2-16=0$;

в) $x^2-2x+10=0$; е) $x^2+100=0$.

Задание 7. Выполните действия:

а) $(1-i)^{12}$; б) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right)^3$; в) $\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^6$; г) $\left[\frac{3}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) i \right]^{10}$

Основные источники (ОИ):

1. Омельченко, В.П. Математика [Текст]: учеб.пособие/В.П.Омельченко, Э.В.Курбатова. – 9-е изд.стер. - Ростов н/Д.: Феникс, 2014. – 380 с.
2. Пехлецкий, И.Д. Математика [Текст]: учеб./ Н.Д.Пехлецкий. – 8-е изд.стер.- М.: Академия, 2011. – 304 с.

Дополнительные источники (ДИ):

1. Дадаян, А. А. Математика [Электронный ресурс]: учеб./ А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум, 2010. - 544 с. (ЭБС Znanium.com). Режим доступа: <http://znanium.com/go.php?id=242366>
2. Епихин, В. Е. Алгебра и теория пределов. Элективный курс [Электронный ресурс] : учеб. пособ. / В. Е. Епихин. - 2-е изд. (эл.). - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. - 352 с. (ЭБС Znanium.com). Режим доступа

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

СВЕДЕНИЯ О СЕРТИФИКАТЕ ЭП

Сертификат 701031612826891639560652498134944806191634741016

Владелец Шахбазян Вера Арамовна

Действителен с 16.09.2024 по 16.09.2025