Лекция №3. Правила Кирхгофа

Цель: изучить методы расчета сложных цепей

Общие сведения

Электрические цепи с последовательно-параллельным соединением приемников энергии при питании их от одного источника электрической энергии, а также одноконтурные цепи называют *простыми цепями*. Расчет этих цепей осуществляется по формулам законов Ома. При этом заданные сопротивления часто заменяют одним эквивалентным. Электрические цепи с несколькими контурами, состоящими из разных ветвей с произвольным размещением потребителей и источников энергии, называются *сложными электрическими цепями*.

Основными понятиями сложной цепи являются понятия *узла, ветви* и *контура*.

Ветвью электрической цепи и ее схемы называют участок цепи, который включен между двумя соседними узлами и по которому протекает один и тот же ток.

Узлом цепи и ее схемы называется место соединения трех и более ветвей.

Любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям, называется *контуром*. Элементарным или независимым контуром называется контур, отличающийся от любого другого контура хотя бы одним элементом.

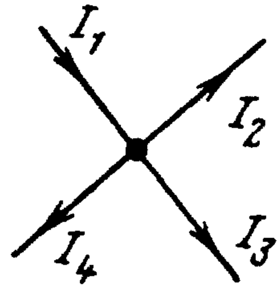
Законы Кирхгофа

Все электрические цепи подчиняются первому и второму законам (правилам) Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа можно сформулировать двояко:

1) алгебраическая сумма токов, подтекающих к любому узлу схемы, равна нулю;

2) сумма подтекающих к любому узлу токов равна сумме утекающих от узла токов.



Применительно к рисунку, если подтекающие к узлу токи считать положительными, а утекающие – отрицательными, то согласно первой формулировке

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0,$$

а согласно второй –

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4.$$

Физически первый закон Кирхгофа означает, что движение зарядов в цепи происходит так, что ни в одном из узлов они не скапливаются.

Второй закон Кирхгофа также можно сформулировать двояко:

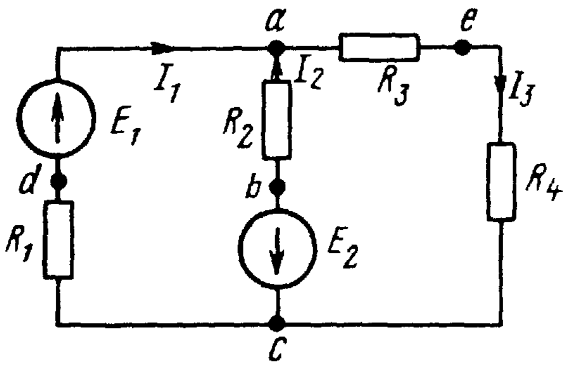
1) алгебраическая сумма падений напряжения в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС вдоль того же контура:

$$\sum IR = \sum E$$

(в каждую из сумм соответствующие слагаемые входят со знаком плюс, если они совпадают с направлением обхода контура, и со знаком минус, если они не совпадают с ним);

2) алгебраическая сумма напряжений (не падений напряжения!) вдоль любого замкнутого контура равна нулю:

$$\sum U_{kl} = 0.$$



Например, для периферийного контура схемы на рисунке

$$U_{ae} + U_{ec} + U_{cd} + U_{da} = 0.$$

Законы Кирхгофа справедливы для линейных и нелинейных цепей при любом характере изменения во времени токов и напряжений.

Составление уравнений для расчета токов в схемах с помощью законов Кирхгофа

Законы Кирхгофа используют для нахождения токов в ветвях схемы. Обозначим число всех ветвей схемы k, а число узлов n. В каждой ветви схемы течет свой ток. Перед тем как составить уравнения, необходимо произвольно выбрать: а) положительные направления токов в ветвях и обозначить их на схеме; б) положительные направления обхода контуров для составления уравнений по второму закону Кирхгофа.

С целью единообразия рекомендуется для всех контуров положительные направления обхода выбирать одинаковыми, например, по часовой стрелке.

Чтобы получить линейно независимые уравнения, по первому закону Кирхгофа составляют уравнения, число которых равно числу узлов без единицы, т. е. $n - 1$.

Уравнение для последнего n-го узла не составляют, так как оно совпало бы с уравнением, полученным при суммировании уже составленных уравнений для $n - 1$ узлов, поскольку в эту сумму входили бы дважды и с противоположными знаками токи ветвей, не подходящих к n-му узлу, а токи ветвей, подходящих к n-му узлу, входили бы в эту сумму со знаками, противоположными тем, с какими они вошли бы в уравнение для n-го узла.

По второму закону Кирхгофа составляют уравнения, число которых равно числу ветвей k, за вычетом уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, т. е. $k - (n - 1) = k - n + 1$.

Составляя уравнения по второму закону Кирхгофа, следует охватить все ветви схемы, исключая лишь ветви с источниками тока.

При записи линейно независимых уравнений по второму закону Кирхгофа стремятся, чтобы в каждый новый контур, для которого составляют уравнение, входила хотя бы одна новая ветвь, не вошедшая в предыдущие контуры, для которых уже записаны уравнения по второму закону Кирхгофа. Такие контуры условимся называть *независимыми.*

Требование, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна новая ветвь, является достаточным, но не необходимым условием, а потому его не всегда выполняют. В таких случаях часть уравнений по второму закону Кирхгофа составляют для контуров, все ветви которых уже вошли в предыдущие контуры.

Пример. Найти токи в ветвях последней схемы, в которой E_1 = 80 В, E_2 = 64 В, R_1 = 6 Ом, R_2 = 4 Ом, R_3 = 3 Ом, R_4 = 1 Ом.

Решение. Произвольно выбираем положительные направления тока в ветвях. В схеме $k = 3$, $n = 2$.

Следовательно, по первому закону Кирхгофа, можно составить только одно уравнение:

$$I_1 + I_2 = I_3.$$

Нетрудно убедиться, что для второго узла получили бы аналогичное уравнение. По второму закону Кирхгофа составим $k - (n - 1) = 3 - (2 - 1) = 2$ уравнения. Положительные направления обхода контуров выбираем по часовой стрелке.

Для контура $R_1E_1R_2E_2$

$$I_1R_1 - I_2R_2 = E_1 + E_2.$$

Знак плюс перед I_1R_1 взят потому, что направление тока совпадает с направлением обхода контура; знак минус перед I_2R_2 – потому, что направление I_2 встречно обходу контура.

Для контура $E_2R_2R_3R_4$

$$I_2R_2 + I_3\left(R_3 + R_4\right) = -E_2.$$

Совместное решение трех уравнений дает I_1 = 14 А, I_2 = – 15 А, I_3 = – 1 А.

Поскольку положительные направления токов выбирают произвольно, в результате расчета какой-либо один или несколько токов могут оказаться отрицательными. В рассмотренном примере отрицательными оказались токи I_2

и I_3, что следует понимать так: направления токов I_2 и I_3 не совпадают с направлениями, принятыми для них на схеме за положительные, т. е. в действительности токи I_2 и I_3 проходят в обратном направлении.

Метод контурных токов

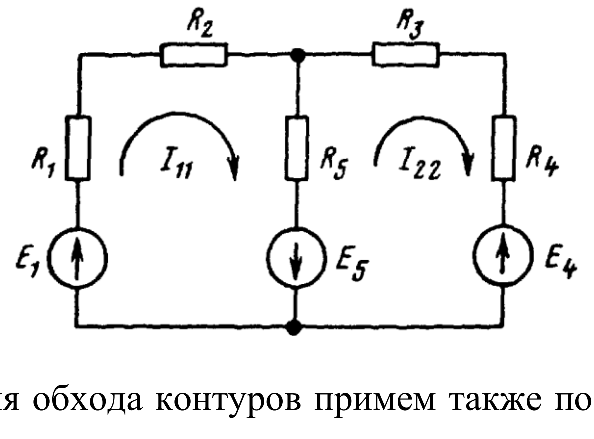
Метод расчета путем решения уравнений, составленных по законам Кирхгофа, трудоемок. Например, для цепи, имеющей шестнадцать ветвей, требуется решать систему шестнадцати уравнений.

Значительно упрощает расчет метод контурных токов, так как позволяет сократить число уравнений. При расчете методом контурных токов полагают, что в каждом независимом контуре схемы течет свой контурный ток. Уравнения составляют относительно контурных токов, после чего через них определяют токи ветвей.

Таким образом, *метод контурных токов* можно определить как метод расчета, в котором за искомые принимают контурные токи. Число неизвестных в этом методе равно числу уравнений, которые необходимо было бы составить для схемы по второму закону Кирхгофа.

Следовательно, метод контурных токов более экономен при вычислительной работе, чем метод на основе законов Кирхгофа (в нем меньше число уравнений).

Вывод основных расчетных уравнений приведем применительно к схеме на рисунке, в которой два независимых контура. Положим, что в левом контуре по часовой стрелке течет контурный ток I_{11}, а в правой (также по часовой стрелке) – контурный ток I_{22}. Для каждого контура составим уравнения по второму закону Кирхгофа. При этом учтем, что по смежной ветви (с сопротивлением R_5) течет сверху вниз ток $I_{11} – I_{22}$. Направления обхода контуров примем также по часовой стрелке.



Для первого контура

$$\left(R_1 + R_2\right)I_{11} + R_5\left(I_{11} - I_{22}\right) = E_1 + E_5$$

или

$$\left(R_1 + R_2 + R_5\right)I_{11} + \left(-R_5\right)I_{22} = E_1 + E_5.$$

Для второго контура

$$-R_5\left(I_{11} - I_{22}\right) + \left(R_3 + R_4\right)I_{22} = -E_4 - E_5$$

или

$$\left(-R_5\right)I_{11}+\left(R_3+R_4+R_5\right)I_{22}=-E_4-E_5.$$

Введем обозначения:

$R_{11}=R_1+R_2+R_5$, $R_{12}=R_{21}=-R_5$, $R_{22}=R_3+R_4+R_5$,

$E_{11}=E_1+E_5$, $E_{22}=-E_4-E_5$

Тогда уравнения для двух контуров можно переписать в виде:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11}+R_{12}I_{22}=E_{11} \\ R_{21}I_{11}+R_{22}I_{22}=E_{22} \end{cases},$$

где R_{11} – полное или собственное сопротивление первого контура; R_{12} – сопротивление смежной ветви между первым и вторым контурами, взятое со знаком минус; E_{11} – контурная ЭДС первого контура, равная алгебраической сумме ЭДС этого контура (в нее со знаком плюс входят те ЭДС, направления которых совпадают с направлением обхода контура); R_{22} – полное или собственное сопротивление второго контура; R_{21} – сопротивление смежной ветви между первым и вторым контурами, взятое со знаком минус; E_{22} – контурная ЭДС второго контура.

В общем случае можно сказать, что сопротивление смежной ветви между k- и m- контурами (R_{km}) входит в уравнение со знаком минус, если направления контурных токов I_{kk} и I_{mm} вдоль этой ветви встречны, и со знаком плюс, если направления этих токов согласны.

Если в схеме больше двух контуров, например три, то система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11}+R_{12}I_{22}+R_{13}I_{33}=E_{11} \\ R_{21}I_{11}+R_{22}I_{22}+R_{23}I_{33}=E_{22} \\ R_{31}I_{11}+R_{32}I_{22}+R_{33}I_{33}=E_{33} \end{cases}.$$

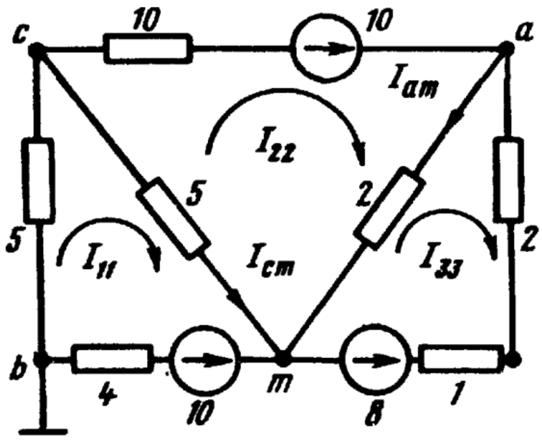
Рекомендуется для единообразия в знаках сопротивлений с разными индексами все контурные токи направлять в одну и ту же сторону, например, по часовой стрелке.

В результате решения системы уравнений какой-либо один или несколько контурных токов могут оказаться отрицательными.

В ветвях, не являющихся смежными между соседними контурами (например, в ветви с сопротивлениями R_1, R_2 последней схемы), найденный контурный ток является действительным током ветви. В смежных ветвях через контурные токи определяют токи ветвей. Например, в ветви с сопротивлением R_5 протекающий сверху вниз ток равен разности $I_{11}-I_{22}$.

Пример. Найти токи в схеме методом контурных токов. Числовые значения сопротивлений в омах и ЭДС в вольтах указаны на рисунке.

Решение. Выберем направления всех контурных токов I_{11}, I_{22}, I_{33} по часовой стрелке. Определяем:



R_{11} = 5 + 5 + 4= 14 Ом;

R_{22} = 5 + 10 + 2= 17 Ом;

R_{33} = 2 + 2 + 1= 5 Ом;

$R_{12} = R_{21}$ = –5 Ом;

$R_{13} = R_{31}$ = 0;

$R_{23} = R_{32}$= –2 Ом;

E_{11} = –10 В;

E_{22} = 10 В;

E_{33} = –8 В.

Записываем систему уравнений:

$$\begin{cases} 14I_{11} - 5I_{22} = -10 \\ -5I_{11} + 17I_{22} - 2I_{33} = 10. \\ -2I_{22} + 5I_{33} = -8 \end{cases}$$

Решая данную систему, находим контурные токи:

$I_{11} = -0,634\text{А}$; $I_{22} = 0,224\text{А}$; $I_{33} = -1,51\text{А}$.

Ток в ветви *cm* $I_{cm} = I_{11} - I_{22} = -0,634 - 0,224 = -0,86\text{А}$.

Ток в ветви *am* $I_{am} = I_{22} - I_{33} = 0,224 + 1,51 = 1,734\text{А}$.

Вопросы для самоконтроля.

1. В чем отличие простых цепей от сложных?

2. Дайте определения понятий узла, ветви и контура.

3. Сформулируйте первый закон Кирхгофа.

4. Сформулируйте второй закон Кирхгофа

5. Сформулируйте правила составления уравнений для расчета токов в схемах с помощью законов Кирхгофа.

6. В чем состоит метод контурных токов?