№ урока	Наименование разделов и тем	Самостоятельная работа
	Раздел 1. Введение в математический анализ	
	Тема 1.1 Предел функции Непрерывность функции	**8**
1	Тема 1.1.1 Введение. Цели и задачи предмета.	Функция одной независимой переменной и способы ее задания. Характеристики функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Сложные и обратные функции. Практическая работа: Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований.Выполнение презентации по теме: «Исследование функции» Определение предела функции. Основные теоремы о пределах.Замечательные пределы. Непрерывность функции. Исследование функции на непрерывность.
2	Тема 1.1.2. **Практическая работа №1** Нахождение пределов функции	
	Тема 1.2 Дифференциальное и интегральное исчисление	**13**
3	Тема 1.2.1**Практическая работа №2** Геометрический смысл дифференциала. Формулы интегрирования	Понятие производной функции, ее геометрический и физический смысл. Правила дифференцирования. Применение производной к решению практических задач. Дифференцирование сложных функций. Практическая работа: Правило Лопиталя. Практическая работа: Дифференциал функции. Возрастание и убывания функций. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значение функции. Вогнутость кривой. Точки перегиба. Общая схема исследования функции.Понятие дифференциала. Геометрический смысл дифференциала. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям. Неопределенный
4	Тема 1.2.2. **Практическая работа №3** Интегрирование способом подстановки	

		интеграл, его свойства. Основные формулы интегрирования. Способы вычисление неопределённого интеграла Практическая работа: Интегрирование по частям. Определенный интеграл, его геометрический смысл, основные свойства и методы вычисления определённого интеграла. Вычисление определенного интеграла методом подстановки. Формула интегрирования по частям. Применение определённого интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объемов.Практическая работа: Вычисление длины дуги. Решение прикладных задач в области профессиональной деятельности.Выполнение реферата по теме: «Приближенные вычисления с помощью дифференциала в экономике». Решение прикладных задач на экстремум. Выполнение реферата по теме: «Экономический смысл определенного интеграла».
	Тема 1.3 Обыкновенные дифференциальные уравнения	**16**
5	Тема 1.3.1. Основные понятия и определения дифференциальных уравнений.	Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные и линейные дифференциальные уравнения Уравнение Бернулли Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами Неполные дифференциальные уравнения второго порядка
	Раздел 2. Линейная алгебра	**16**
6	Тема2. 1. Комплексные числа, и их геометрическая интерпретация	Решение задач на нахождение действительной части комплексного числа и его мнимой части. Нахождение сопряженного числа комплексному числу . Нахождение модуля комплексного числа. Решение задач на нахождение суммы, разности, произведения и деление комплексных чисел. Возведение в степень комплексного числа. Изобразить геометрически комплексное число. Действия над комплексными
7	Тема 2.2 **Практическая работа №4** Арифметические действия с комплексными числами	

		числами, заданными в алгебраической и тригонометрической формах Показательная форма записи комплексного числа. Формула Эйлера.
	Раздел 3 Основы дискретной математики.	**10**
8	Тема 3. 1. Множество и его элементы	Операции над множествами: пересечение множеств, объединение множеств, дополнение множеств Числовые множества Задачи, приводящие к понятию графа. Основные понятия теории графов Применение теории множеств и теории графов при решении прикладных задач
	Раздел 4. Теория вероятностей и математическая статистика	
	Тема 4.1 Теория вероятностей	**10**
9	Тема 4.1.1. События и их классификация..Сумма и произведение событий	Комбинаторика. Выборки элементов Вероятность появления хотя бы одного события Повторные независимые испытания Простейший поток случайных событий и распределение Пуассона Локальная теорема Лапласа. Интегральная теорема Лапласа и ее применение Числовые характеристики дискретной случайной величины
10	Тема 4.1.2. **Практическая работа №5** Решение задач на вероятность	
	Тема 4.2 Математическая Статистика	**10**
11	Тема 4.2.1. Основные выборочные характеристики.	Генеральная и выборочная статистические совокупности Разброс Доверительная вероятность и интервал Характеристики случайной величины. Математическое ожидание и его свойства. Дисперсия и её свойства. Мода и медиана случайной величины. Моменты случайной величины.
12	Тема 4.2.2. **Практическая работа №6** Вычисление числовых характеристик	
	Раздел 5. Матрицы	**20**

13	Тема 5.1. Понятие матрицы. Определитель Методы решения систем линейных уравнений	Ранг матрицы. Вычисление обратной матрицы. Вычисление определителя методом треугольника. Свойства матрицы. Арифметические действия над матрицей. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы. Решение системы линейных уравнений методом Гауса
14	Тема 5.2 **Практическая работа №7** Операции над матрицами	
15	Тема 5.3. **Практическая работа №8** Вычисление определителей .	
16	Тема 5.4. **Практическая работа №9** Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы.	
17	Тема 5.5 **Практическая работа №10** Решение системы линейных уравнений методом Крамера.	
18	Тема 5.6**. Контрольная работа**	

Практическая работа 2

«Геометрический смысл дифференциала.Формулы дифференцирования»

Цель работы: закрепить навык решения задач и приемы вычисления дифференциала функции, ознакомиться с выводом формулы дифференциала, его геометрической интерпретацией.
Необходимо знать: формулу и определение дифференциала, правила вычисления производной функции.
Необходимо уметь: находить дифференциал функции;
решать задачи с применением дифференциала.

Рекомендации к выполнению работы:
Изучить теоретический материал.
Решить в тетради практическую часть, выбрав из задания №1 и №2 вариант по своему месяцу рождения. (Например март-номер варианта 3).
Ответить на контрольные вопросы.

1. Теоретическая часть

Согласно определению производной функции имеем: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$. Используя свойство предела, равенство можно записать в виде: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где $\alpha \to 0$. Итак, $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где величина $\alpha \cdot \Delta x \to 0$, поэтому ею можно пренебречь. Получили, что приращение функции Δy зависит от производной и приращения аргумента. Величина $y' \cdot \Delta x$ является главной частью приращения функции.
Иначе произведение $y' \cdot \Delta x$ называют **дифференциалом функции** и обозначают **dy** . Заметим, что дифференциал переменной равен ее приращению: $dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$. Получаем формулу дифференциала функции: $dy = y' \cdot dx$

Определение. Дифференциалом функции называется произведение производной на дифференциал ее аргумента.
Например, вычислим дифференциал функции: $y = 3x^2 + 4x + 7$

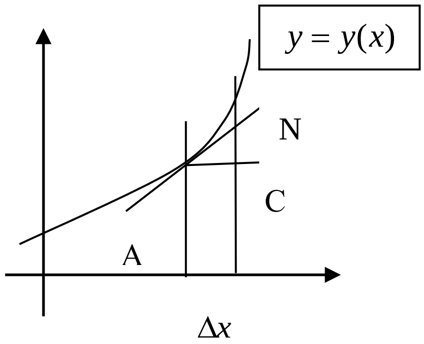
$$dy = \left(3x^2 + 4x + 7\right)' \cdot dx = (6x + 4)dx$$

Рассмотрим на примере сложной функции $y = \sin\sqrt{x}$. Ее дифференциал будет:

$$dy = \left(\sin\sqrt{x}\right)' \cdot dx = \cos\sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' \cdot dx = \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{\cos\sqrt{x} \cdot dx}{2\sqrt{x}}$$

Геометрический смысл дифференциала функции.

Рассмотрим дифференцируемую функцию y=y(x). К графику проведем касательную AN. Зададим приращение аргумента Δx = AC.
В треугольнике ANC катет NC=AC·tgNAC, так как значение производной равно тангенсу угла наклона касательной y'= tgNAC, получаем NC= $\Delta x \cdot y'$=dy.



Дифференциал функции равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции y=y(x), при переходе аргумента от x к x+Δx.

Применение дифференциала функции к решению задач

__Задача 1__. Найти приращение функции $y=2\cdot x^2+3$ при изменении абсциссы от 2 до 2,001.

Решение: приращение функции будем находить с помощью её дифференциала $\Delta y=dy$.
$dy=(2\cdot x^2+3)'\cdot dx=4\cdot x\cdot dx$. Пусть x = 2 , x_1 = 2,001.
Дифференциал аргумента равен его приращению $dx = x_1 - x = 2{,}001 - 2 = 0{,}001$.
Вычислим по формуле $dy=4\cdot 2\cdot 0{,}001=0{,}008$.

Ответ: приращение функции равно 0,008

__Задача 2.__ Шар радиуса 20 см был нагрет, отчего его радиус увеличился на 0,01 см. На сколько увеличится объём шара?

Решение: воспользуемся формулой объёма шара $V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$. Найдём дифференциал по формуле $dV=V'\cdot dR=\frac{4}{3}\left(R^3\right)'\cdot\pi\cdot dR=\frac{4}{3}\cdot 3R^2\cdot\pi\cdot dR=4\pi\cdot R^2\cdot dR$. По условию задачи R=20 см, а увеличение радиуса составляет его дифференциал, т.е. dR=0,01.
Подставим в формулу эти числа: $dV=4\pi\cdot 20^2\cdot 0{,}01=16\pi$.

Ответ: объём увеличился на 16π $см^3$

2. Проверьте себя.

1.Найти дифференциал функции:

$y=3x^2-6x+5$

$S=\sqrt{t}-2\cdot t^3+\frac{1}{t}$

$Z=\sin t\cdot 10^t$

$g=4\cdot tg\frac{z}{3}$

$f(x)=\left(x^3+2\right)^{15}$

Ответы:

$dy=\left(6x-6\right)\cdot dx$

$dS=\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}-6t^2-\frac{1}{t^2}\right)\cdot dt$

$dZ=10^t(\cos t+\sin t\cdot\ln 10)\cdot dt$

$dg=\frac{4\cdot dz}{3\cos^2\frac{z}{3}}$

$df=45x^2(x^3+2)^{14}\cdot dx$

2.Задача. Найти первоначальное значение радиуса круга, если радиус увеличился на 0,1 см, при этом площадь круга увеличилась на 10π $см^2$.

Ответ: радиус 50 см.

3. Самостоятельная работа

__Задание №1.__ Найти дифференциал функции.

1	$y(x)=x^3\cdot\ln x$ $\varphi(z)=\dfrac{5}{3z^2-8}$ $S(t)=10^t+7t$	**2**	$y(x)=\ln x+\dfrac{5}{x}$ $S(z)=6^z\cdot ctgz$ $\varphi(t)=\sqrt{3t^4+6}$	**3**	$S(z)=\sqrt{5z-6}$ $\varphi(x)=x^6-\dfrac{5}{x}-2\sqrt{x}$ $f(t)=4t^3\cdot\cos t$
4	$y(z)=5z^4-3z^3+2z-11$ $S(x)=\cos(5x-3)$ $\varphi(t)=\dfrac{7-t}{7+t}$	**5**	$S(t)=4t^2-\dfrac{3}{\sqrt{t}}$ $g(x)=tg(3x+4)$ $f(z)=7^z\cdot\sin z$	**6**	$S(t)=e^t\cdot(4t-t^3)$ $y(x)=\sqrt{tgx}$ $W(z)=\dfrac{z^2-4}{z^2+5}$
7	$S(t)=\sqrt{t^2+4}$ $y(x)=\sqrt{x}\cdot tgx$ $g(z)=3z^3-2z$	**8**	$y(x)=3x^5-8x+4$ $f(z)=(5z^3-2)^7$ $S(t)=\ln(1-t^2)$	**9**	$f(t)=e^{2t+8}$ $S(t)=t^3\cdot\sin t$ $g(z)=5z^2-3z-2$
10	$f(t)=\ln(t^4-3t-10)$ $S(z)=5^z\cdot\sin z$ $y(x)=(1+4x)^{12}$	**11**	$y(x)=e^x\cdot\cos x$ $S(t)=\sqrt{9+t^3}$ $\varphi(z)=4z^2-3\ln z+9z$	**12**	$f(x)=14^x\cdot(2x-4)$ $S(z)=(6z^2-9)^4$ $y(t)=5\sin 6t$

Задание №2. Решить задачи в соответствии с номером варианта, записать ответ.

№	Задача **1**	Задача **2**
1	Дана функция $y=x^3-2x^2+100$. Пусть x=3. Найти изменение аргумента, если приращение функции составило 0,15.	Найти приращение площади квадрата $(S=a^2)$ со стороной 17,5 см при увеличении его стороны на 0,1 см.
2	Найти приращение объёма конуса $(V=\dfrac{1}{3}\pi R^2\cdot H)$ высотой 3 дм, если радиус основания увеличился от 2 дм до 2,5 дм.	Приращение функции $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2-5x+1$ равно -0,9. Найти первоначальное значение аргумента, если его приращение равно 0,1.
3	Вычислить дифференциал функции $y=x^3+2x^2-10x+7$ при изменении аргумента от 3 до 3,02.	Объём куба $(V=a^3)$, ребро которого 3см, при нагревании увеличился на 0,54 см^3. На сколько увеличилось ребро куба?
4	Приращение функции $f(x)=2x^3-x^2+20$ составило 0,14. Найти приращение аргумента, если первоначально *x*=5.	Найти приращение площади круга $(S=\pi\cdot R^2)$, если радиус изменился от 20 до 20,2см.
5	Найти приращение функции $f(x)=x^3-5x^2+80$ при *x*=4 и $\Delta x=0.001$.	Объём куба увеличился на 75 $см^3$. Узнайте первоначальную длину ребра $(V=a^3)$, если оно увеличилось на 0,01.
6	Найти приращение функции $f(x)=5x^2-2x+3$ при изменении аргумента от 2 до 2,01.	Шар радиусом 20*см* увеличил свой объём на 32π см^3. $\left(V=\dfrac{4}{3}\pi\cdot r^3\right)$ На сколько увеличился радиус?
7	Найти приращение функции $f(x)=2x^3-x^2+50$ при переходе аргумента от 5 к 5,001.	Тело движется по закону $S(t)=3t^2$. Найти первоначальный момент времени, если при изменении времени на 0,01 сек. Приращение пути составило 0,3 м.
8	Найти дифференциал функции $y(x)=x^3+x-1$ при x=2, $\Delta x=0.01$	Найти на сколько изменится сторона квадрата, если его площадь увеличится на 0,4 см^2.($S=a^2$) Первоначальная длина стороны 10 см.

9	Найти дифференциал функции $y(x) = x^3 - 5x^2 + 80$ при изменении аргумента от 4 до 4,001.	Площадь круга увеличилась на 8π см^2, при этом радиус увеличился на 0,1см. Найти первоначальный радиус. ($S = \pi R^2$)
10	Найти дифференциал функции $y(x) = 2x^2 + 3$ при x=2, $\Delta x = 0.01$	Площадь круга изменилась на 8π см^2. Найти приращение радиуса круга, если первоначальная длина 40 см.($S = \pi R^2$)
11	Высота конуса 20см, радиус основания 15см. На сколько увеличится объём ($V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$) конуса, если радиус основания увеличится на 0,4 дм?	Дана функция $y(x) = 2x^2 + 3$, первоначальное значение аргумента x=2. Найти приращение аргумента, если приращение функции составил 0,008.
12	Найти дифференциал функции $y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$ при изменении аргумента от 3 до 3,02.	Найти первоначальный радиус шара, если приращение объёма 1080π см^3, при этом радиус изменился на 0,3см.($V = \frac{4}{3}\pi R^3$)

4. Контрольные вопросы

1. Что называют дифференциалом функции?
2. Приведите формулу вычисления дифференциала.
3. В чём состоит геометрический смысл дифференциала функции?

Критерии оценки

«Отлично» - приведены ответы на все контрольные вопросы, полностью выполнено задание №1 и решены обе задачи из задания №2.

«Хорошо» - приведены ответы на все контрольные вопросы, при этом полностью выполнено задание №1 и решена одна задача из задания №2; или решены обе задачи, а при вычислении дифференциала допущена 1 ошибка.

«Удовлетворительно» - полностью выполнено задание №1 или только задание №2; или решена одна задача и при дифференцировании допущена 1 ошибка.

«Неудовлетворительно» - задание №1 выполнено с ошибками, к заданию №2 не приступали.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3

по теме «Вычисление неопределенного интеграла. Интегрирование методом подстановки».

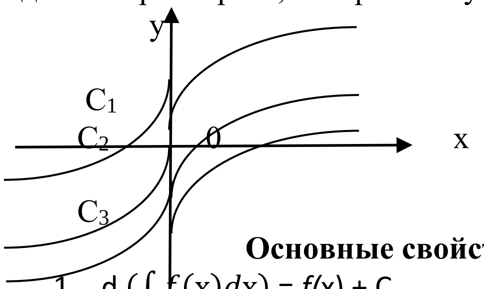
Теоретический материал:

Неопределенный интеграл функции у = *f(*x) – это совокупность всех первообразных функций F(x) + C для функции *f(*x). Обозначается символом $\int f(\mathrm{x})d\mathrm{x}$ = F(x) + C,

где $\int$– *знак интеграла; f(*x) *– подынтегральная функция; f(*x) dx *– подынтегральное выражение;* C *– постоянная интегрирования*, способная принимать любое значение; x – переменная интегрирования.

Интегрирование – это отыскание первообразной по ее производной.
Это действие, обратное дифференцированию.

Геометрический смысл неопределенного интеграла: это семейство кривых, зависящих от одного параметра С, которые получаются путем параллельного переноса вдоль оси 0у.



Кубическая парабола у = $\int 3\mathrm{x}^2\, dx = \mathrm{x}^3$ + C;

Основные свойства неопределенного интеграла

1. d ($\int f(\mathrm{x})d\mathrm{x}$) = *f(*x) + C.
2. $\int df(\mathrm{x})$ = *f(*x) + C.
3. $\int$ C $f(\mathrm{x})d\mathrm{x}$ = C $\int f(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}$ – постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.
4. $\int\big(f(\mathrm{x}) + g(\mathrm{x})\big)d\mathrm{x} = \int f(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} + \int g(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}$ - интеграл суммы равен сумме интегралов.

Основные способы интегрирования

1. *Метод непосредственного интегрирования*, который заключается в использовании основных свойств неопределенного интеграла и приведении подынтегрального выражения к табличному виду.

   Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int\left(\frac{3}{\mathrm{x}} + 2\sin\mathrm{x}\right)d\mathrm{x}$.

   Решение. Используя 3 и 4 свойства неопределенного интеграла и таблицу интегрирования, получаем (таблица прилагается)

   $\int\left(\frac{3}{\mathrm{x}} + 2\sin\mathrm{x}\right)d\mathrm{x} = 3\int\frac{d\mathrm{x}}{\mathrm{x}} + 2\int\sin\mathrm{x}\, d\mathrm{x}$ = 3 ln | x |- 2cos x + C.

2. *Метод подстановки или метод введения новой переменной.*

   Это самый эффективный прием сведения неопределенного интеграла к табличному виду.

   Пример 2. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{\mathrm{x}^2}{(\mathrm{x}+1)^3}\, d\mathrm{x}$.

   Решение. Положим x + 1 = t, тогда x = t – 1; $\mathrm{x}^2 = (t-1)^2$; $(\mathrm{x}+1)^3 = t^3$.

   Продифференцировав x + 1 = t, получим *dx = dt.*

   $\int\frac{\mathrm{x}^2}{(\mathrm{x}+1)^3}\, d\mathrm{x} = \int\frac{(t-1)^2}{t^3}\, dt = \int\frac{t^2+2t+1}{t^3}\, dt = \int\frac{dt}{t} - 2\int\frac{dt}{t^2} + \int\frac{dt}{t^3} = \int\frac{dt}{t} - 2\int t^{-2}dt + \int t^{-3}\, dt =$

   $\ln|\,t\,| - 2\,\frac{t^{-1}}{-1} +$

<u>Индивидуальная практическая работа</u>

Найти неопределенный интеграл:

Блок А

1. $\int 5\, dx.$
2. $\int 4(x^2 - x + 3)dx.$
3. $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x}\, dx\,.$
4. $\int x^{-4}\, dx\,.$
5. $\int \frac{3\, dx}{x}\,.$ 6. $\int \frac{dx}{x+1}\,.$

Блок В

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}\,.$ 2. $\int (3x^{-4} + 8x^{-5})dx.$
3. $\int 2^x\, dx.$ 4. $\int e^{-3x^2} x\, dx.$
5. $\int cos\,(5x - 3)dx.$
6. $\int \frac{dx}{x^2 - 4}.$ 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}\,.$
8. $\int (3x + 2)^5 dx.$

Критерии оценки

«Отлично» - Решены правильно задания блока А и блока В
«Хорошо» -Решены все задания блока А и от одного до восьми заданий блока В .
«Удовлетворительно» - Решены все задания блока А

Практическая работа №4

Тема: «Действия над комплексными числами в алгебраической форме»

Цель работы: научиться выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме, решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом.

Рекомендации к выполнению работы:
Изучить теоретический материал.
Решить в тетради практическую часть. Задания №1и №2 (Вариант выбрать по желанию)

Краткие теоретические сведения.

Комплексные числа - числа вида $\boldsymbol{Z = a + ib}$, где a,b – вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ - *мнимая единица* ($i^2 = -1$). Множество комплексных чисел обозначается С.

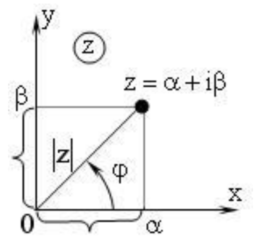
Действительные числа a и b комплексного числа $\boldsymbol{Z = a + ib}$, называются *действительной и мнимой частью* числа z и обозначаются, соответственно, $Rez=x$ и $Imz=y$.

Два комплексных числа $z_1=a + ib$ и $z_2=c + id$ называются *равными* в том и только том случае, если $a = c$, $b = d$.

Запись $Z=a + ib$ называют *алгебраической формой* комплексного числа z.

Числа $Z=a + ib$ и $\bar{Z}=a - ib$ называют *комплексно сопряженными*.

Геометрическое представление комплексного числа



Если рассмотреть плоскость с прямоугольной системой координат, то любому комплексному числу $z = a + ib$ можно сопоставить точку на этой плоскости с соответствующими координатами (a;b), и радиус-вектор R комплексного числа, т.е. вектор, соединяющий начало координат с точкой на плоскости, соответствующей числу (рис. 1). Данная плоскость называется комплексной. Действительные числа располагаются на горизонтальной (вещественной) оси, мнимые части – на вертикальной (мнимой) оси.

$R = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - *модуль комплексного числа* - расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, *модуль – это длина* радиус-вектора.

$tg\varphi = \frac{b}{a}$, где *φ- аргумент комплексного числа.*

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Сложение: $Z_1 + Z_2 = (a+ib)+(c+id) = (a+c) + (b+d)i.$

Вычитание: $Z_1 - Z_2 = (a+ib)-(c+id) = (a-c) + (b-d)i.$

Умножение: $Z_1 \cdot Z_2 = (a+ib)(c+id)=(ac - bd)+(ad + cb)i.$

Деление: $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}.$

Умножение на сопряженное: $Z \cdot \bar{Z}=(a + bi)(a -bi)= a^2 - b^2i^2= a^2 - b^2\cdot(-1) = a^2 + b^2$ – квадрат суммы

Примеры решения задач:

Пример 1. Выполнить действия над комплексными числами, представив результат в алгебраической форме:

$Z_1 = 4+ 5i, \quad Z_2 = 6-9i.$

Решение: 1) $Z_1 + Z_2 = (4+ 5i) + (6-9i)= 4+6+5i -9i.= 10 - 4i$

2) $Z_1 - Z_2 = (4+ 5i) - (6-9i)= 4-6+5i +9i.= -2 + 14i$

3) $Z_1 \cdot Z_2 = (4+5i)(6- 9i)= 24 -36i + 30i- 45i^2= 24 -6i - 45\cdot(-1) = 69 -6i.$

4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+5i}{6-9i} = \frac{(4+5i)(6+9i)}{(6-9i)(6+9i)} = \frac{24+36i+30i+9i^2}{6^2+9^2} = \frac{15+66i}{36+81} = \frac{15+66i}{117} = \frac{5+22i}{39} = \frac{5}{39} + \frac{22i}{39}$

Ответ: $Z_1 + Z_2 =10 - 4i$, $Z_1 - Z_2 = -2 + 14i$, $Z_1 \cdot Z_2 =69 -6i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{39} + \frac{22i}{39}$

Пример 2. Раскрыть скобки, используя формулы сокращенного умножения:

1) *(2+ 3i)² = 2² + 2·2·3i + (3i)² = 4 +12i + 9·(-1) = -5+12i,*

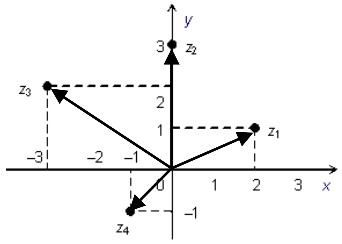
2) *(5 + 4i)(5 - 4i)= 5² –4²i²= 25 – 16·(-1) = 25 + 16 =4,*

3) *(3-5i)² = 3² - 2·3·5i + (-5i)² = 9 - 30i + 25(-1) = -16- 30i.*

Пример 3. Изобразим на комплексной плоскости числа

$Z_1 = 2 + i$; $Z_2 = 3i$;

$Z_3 = -3 + 2i$; $Z_4 = -1 – i$.



Задания для самостоятельного решения №1

Вариант 1	*Вариант 2*	*Вариант 3*	*Вариант 4*
1. Изобразите на плоскости заданные комплексные числа:			
$Z_1 = 4i$ $Z_2 = 3 + i$ $Z_3 = - 4 +3i$ $Z_4 = -2 -5i$	$Z_1 = -5i$ $Z_2 = 4 + i$ $Z_3 = -7 + 2i$ $Z_4 = -3 – 6i$	$Z_1 = -5i$ $Z_2 = 4 + i$ $Z_3 = -7 + 2i$ $Z_4 = -3 – 6i$	$Z_1 = -5i$ $Z_2 = 4 + i$ $Z_3 = -7 + 2i$ $Z_4 = -3 – 6i$
2 . Вычислите модуль комплексного числа			
$Z = 3 + 4i$	$Z = 8 + 6i$	$Z = -1 + \sqrt{3}i$	
3. Произведите сложение и вычитание комплексных чисел:			
$Z_1 = (3 + 5i)$, $Z_2 = (7 – 2i)$	$Z_1 = (3 – 2i)$, $Z_2 = (5 + 3i)$	$Z_1 = (4 + 2i)$, $Z_2 = (– 3 + 2i)$.	$Z_1 = (– 2 + 3i)$, $Z_2 = (7 – 2i)$
4. Выполните действие над комплексными числами:			
а) $(2 + 3i)(5 – 7i)$, б) $(3 + 2i)(3 – 2i)$, в) $(3 + 5i)^2$, г) $\frac{2+3i}{5-7i}$.	а) $(3 + 2i)(1 + 3i)$, б) $(7 – 6i)(7 + 6i)$, в) $(2 – 7i)^2$, г) $\frac{3+5i}{2+6i}$.	а) $(– 2 + 3i)(3 + 5i)$, б) $(4 + 3i)(4 – 3i)$, в) $(4 + 2i)^2$, г) $\frac{2-3i}{5+2i}$.	а) $(6 + 4i)(5 + 2i)$, б) $(2 – 5i)(2 + 5i)$, в) $(3 – 2i)^2$, г) $\frac{6+2i}{3-7i}$.
5. Решите уравнения:			
$x^2 – 4x + 13 = 0$.	$2{,}5x^2 + x + 1 = 0$..	$x^2 + 3x + 4=0$	$4x^2 – 20x + 26 = 0$

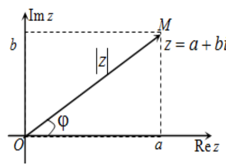
Краткие теоретические сведения.

Для всякого комплексного числа $z = a + ib$ справедливо равенство:

z=R(cosφ+ isinφ) называют *тригонометрической формой комплексного числа,*

$z = Re^{i\varphi}$ – называют *показательной формой комплексного числа*

Здесь $R = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - *модуль комплексного числа* - расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, *модуль – это длина* радиус-вектора.



Угол φ между положительной полуосью действительной оси и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке, называется *аргументом комплексного числа* - $\varphi = arctg\frac{b}{a}$.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

	В тригонометрической форме	***В показательной форме***
	$z_1 = R_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = R_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$	$Z_1 = R_1e^{i\varphi_1}$, $Z_2 = R_2e^{i\varphi_2}$
Умножение	$Z_1 \cdot Z_2 = R_1 \cdot R_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.	$Z_1 \cdot Z_2 = R_1R_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
Деление	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1}{R_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.	$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$,
Возведение в степень	$z^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ - *формула Муавра*	$Z_1^n = R_1e^{in\varphi_1}$.

Извлечение корня $z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R}\left(cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, *k = 0,1,2.....n-1* $z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R}\, e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)}$, *k = 0,1,2.....n-1*

Примеры решения задач:

Пример. А) Представить числа $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = 3 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической и показательной форме,

Б) вычислить в тригонометрической форме: 1) $z_1 \cdot z_2$; 2) $\frac{z_1}{z_2}$; 3) z_2^5; 4) $\sqrt{z_1}$

Решение: А). Получим тригонометрическую и показательную форму $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$,

1) Найдем модуль числа - $R_1 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, 2) Найдем аргумент числа - $\varphi_1 = arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$,

3) запишем к.ч. в тригонометрической и показательной форме:

$z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

$z_2 = 2 + 2i$,

1) $R_2 = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ - модуль числа,

2) $\varphi_2 = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$ - аргумент числа

3) запишем к.ч. в тригонометрической и показательной форме:

$z_2 = 3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Б) Произведение:

$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 2\sqrt{3}\left(cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\sqrt{3}\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$

$= 4\sqrt{3}\left(cos\frac{\pi}{6} - isin\frac{\pi}{6}\right) = 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 6 - 2\sqrt{3}i.$

Частное:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2\sqrt{3}}\left(cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(cos\frac{\pi}{2} - isin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}(0 - 1i) = \frac{\sqrt{3}}{3}i$.

Возведение в степень:

$$z_2^5 = \left(2\sqrt{3}\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)\right)^5 = \left(2\sqrt{3}\right)^5 \cdot \left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right) = 288\sqrt{3}\left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$= 288\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 432 = 144i.$

Извлечение из под знака корня:

$\sqrt{z_1} = \sqrt{2}\left(cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2} + isin\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right)$.

Пр k=0: $z_0 = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{6} - isin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$;

Пр k=1: $z_1 = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = -z_0$.

Задания для самостоятельного решения №2

1. Изобразить комплексные числа на комплексной плоскости.
2. Определить длину и аргумент каждого комплексного числа.
3. Представить данные комплексные числа в тригонометрической и показательной форме.
4. Вычислить в тригонометрической и показательной формах:

   1) $z_1 \cdot z_2$; *2)* $\frac{z_1}{z_2}$; *3)* z_2^3; *4)* $\sqrt{z_1}$

Вариант 1	***Вариант 2***	***Вариант 3***	***Вариант 4***

$Z_1= 2- 2i;$ $Z_2=-\sqrt{3}+i$	$Z_1= 2\sqrt{3}+2i;$ $Z_2=3+3\sqrt{3}i$	$Z_1= 1-i;$ $Z_2=-2-2i$	$Z_1= \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i;$ $Z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

Критерии оценки

«Отлично» - Решены правильно задания №1 и №2 от 90% до 100%
«Хорошо» -от 75% до 90% всех заданий своего варианта
«Удовлетворительно» - от51% до 74% всех заданий

Практическая работа № 5

«Решение задач на вероятность».

Цель: закрепить и проверить знания и умения по нахождению вероятности сложных событий и полной вероятности.

Порядок работы:

1. Внимательно ознакомиться с темой и целью работы.
2. Повторить краткий теоретический материал.
3. Внимательно ознакомиться с заданием практической работы и выполнить его.
4. Устно ответить на вопросы для самоконтроля.

Краткий теоретический материал.

<u>Теорема1</u>: Вероятность суммы двух **несовместных** событий равна сумме вероятностей этих событий: P(A+B)=P(A)+P(B).

<u>Теорема 2</u>: Вероятность суммы двух **совместных** событий А и В равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления, т.е. P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).

Пример 1. Найти вероятность **суммы противоположных** событий.

Решение: События А и А несовместны, следовательно Р(А +А) = Р(А) + Р(А). Сумма двух противоположных событий есть событие достоверное, поэтому Р(А +А)= 1. Тогда Р(А) + Р(А) =1. Отсюда следует :

Р(А) = 1 - Р(А).

Пример 2. В урне 3 красных, 5 синих и 2 белых шара. Наудачу вынимают один шар. Какова вероятность того, что шар окажется цветным?

Решение: Пусть событие А- вынут синий шар, событие В- красный шар. Эти события несовместны. Интересующее событие- вынут цветной шар, означает, что вынут красный или синий, т.е. событие А+В. используем теорему о сумме несовместных событий Р(А+В)=Р(А)+Р(В). вычислим вероятности событий А и В:

Р(А)=5/10=1/2;   Р(В)=3/10. Тогда искомая вероятность равна Р(А+В) = 1/2+3/10= 8/10=0,8.

Пример 3. На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено: а) 2 билета; б) 4 билета?

Решение. Пусть событие A_i={выигрыш по i-му билету}, i=1, 2, 3, 4. События A_i - совместные, но зависимые.

а) По формулам (8) и (4) вероятность выигрыша хотя бы по одному из двух билетов

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)=$$
$$=\frac{5}{100}+\frac{5}{100}-\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{99}=0{,}098.$$

Два события А и В называются **независимыми**, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

События А и В называются **зависимыми**, если появление одного из них изменяет вероятность появления другого.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события В, вычисленная в предположении, что событие А уже произошло. Обозначив условную вероятность $P(A/B)$, получим формулу

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\ (P(B)\neq 0).$$

Теорема 3: Вероятность произведения двух зависимых событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, в предположении, что первое уже произошло, т.е. $P(AB)=P(A)P_A(B)$

Теорема 4: Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению их вероятностей $P(AB)=P(A)P(B)$.

Пример 4. По мишени стреляют три стрелка. Вероятности попадания соответственно равны 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что попадут все три.

Решение:

Пусть событие А- попал 1-й, В- 2-й и С-3-й. Эти события независимые, тогда применяя соответствующую теорему получим, что вероятность совместного появления всех трех событий равна: $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0{,}7\cdot0{,}8\cdot0{,}9=0{,}504$.

Пример 5. Определить вероятность того, что выбранное наудачу изделие является первосортным, если известно, что 4 % всей продукции является браком, а 75 % небракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта.

Решение. Пусть событие А={выбранное изделие небракованное}, событие В={небракованное изделие удовлетворяет требованиям первого сорта}, событие С={выбранное наудачу изделие первосортное}. Событие С предоставляет собой произведение событий А и В: С=АВ. По условию $P(A) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$, $P(B/A) = 0{,}75$. Тогда по теореме умножения вероятностей (см. 2.1) искомая вероятность $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}96 \cdot 0{,}75 = 0{,}72$.

Вероятность Р(В) появления события В, которое может произойти только совместно с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, т. е. $H_i \cdot H_j \neq \phi,\ i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{n} H_i = D$, вычисляется по ***формуле полной вероятности***

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(B/H_i), \ \textbf{где} \ \sum_{c=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

При этом события $H_1, H_2, ..., H_n$ обычно называют **гипотезами**, а числа $P(H_i)$ - вероятностями гипотез.

Условная вероятность гипотезы H_i в предположении, что событие В уже имеет место, определяется по формуле Байеса:

$$P(H_i/B) = \frac{P(BH_i)}{P(B)} = \frac{P(H_i)P(B/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(B/H_i)}, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Вероятности $P(H_i/B)$, вычисленные по формуле Байеса, часто называют вероятностями гипотез.

Задания для практической работы. №5 по теории вероятности

1 **Вариант.**

1) Какова вероятность того, что при одном бросании игральной кости выпадет не 6 очков?

2) Многократные испытания показали, что для некоторого стрелка вероятность выбить при стрельбе 10 очков равна 0,1 , а вероятность выбить 9 очков равна 0,3. чему равна для этого стрелка вероятность выбить не менее 9 очков?

3) В одной партии электролампочек 3% бракованных, а в другой – 4%. Наугад берут по одной лампочке из каждой партии. Какова вероятность того, что обе лампочки окажутся бракованными?

4) На технический контроль качества предъявляется партия из 1000 деталей, в которой 200 деталей изготовлено на заводе А, 300 деталей – на заводе В, остальные – на заводе С. Доля брака зависит от завода-изготовителя и составляет для завода А и В 15%, а для завода С – 30%. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества.

5) Из 50 деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 – во втором, остальные – в третьем. Первый и третий цеха дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,9, второй – с вероятностью 0,6. Взятая деталь оказалась отличного качества. Какова вероятность того, что деталь изготовлена во втором цехе?

Вопросы для самоконтроля.

1. Чему равна сумма вероятностей двух противоположных событий?
2. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?
3. Что называют условной вероятностью? Как её вычислить?
4. Чему равна вероятность двух зависимых событий?
5. Что называют условной вероятностью? Как вычислить условную вероятность?
6. Формула полной вероятности.
7. Чему равна вероятность гипотезы после испытания?